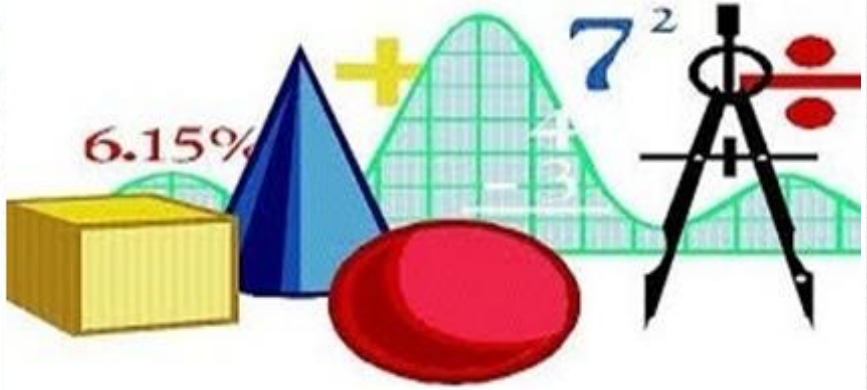




Cálculo 1

1.2- Propriedades dos Limites



Ali Aidar

Propriedades dos limites

Sejam ***b*** e ***c*** dois números reais, e seja **n** um inteiro positivo.

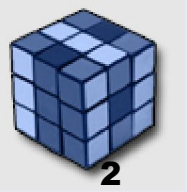
I) $\lim_{x \to c} b = b$

II) $\lim_{x \to c} x = c$

III) $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

IV) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

Obs.: Em **IV**, se ***n*** for par, ***c*** deve ser positivo.



Operação com limites

Sejam ***b*** e ***c*** dois números reais, **n** um inteiro positivo e ***f*** e ***g*** funções para as quais $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$.

I) $\lim_{x \to c} [b.f(x)] = bL$

II) $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

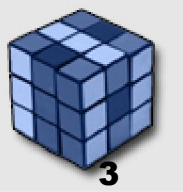
III) $\lim_{x \to c} [f(x).g(x)] = L.M$

IV) $\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}; \quad \left(\lim_{x \to c} g(x) \neq 0\right)$

V) $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

VI) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Obs.: Em **VI**, se ***n*** for par, ***L*** deve ser positivo.



Operação com limites

Propriedades

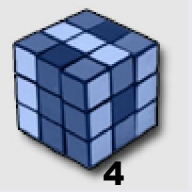
- **P_1 -** O limite da função identidade **f(x) = x**, quando **x** tende a "**a**", é igual a "**a**".

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 3} x = 3 \qquad \lim_{x \to e} x = e \qquad \lim_{x \to -0,3} x = -0,3$$

$$\lim_{x \to \pi} x = \pi \qquad \lim_{x \to \sqrt[3]{5}} x = \sqrt[3]{5}$$



Operação com limites

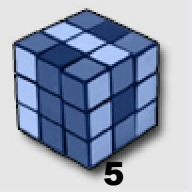
- **P_2 -** O limite de uma função constante **f(x) = K**, quando **x** tende a "**a**", é igual a própria constante:

$$\lim_{x \to a} K = K$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 3} 4 = 4 \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}} e = e$$

$$\lim_{x \to 2} \pi = \pi \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}$$



Operação com limites

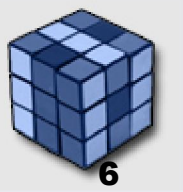
- **P_3 -** O **limite da soma** é igual a **soma dos limites** (caso esses limites existam):

$$\lim_{x \to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2}(x^2+3x+5)=\lim_{x \to 2} x^2+\lim_{x \to 2} 3x+\lim_{x \to 2} 5=$$

$$\lim_{x \to 2} x^2+3\lim_{x \to 2} x+\lim_{x \to 2} 5=2^2+3.2+5=15$$



Operação com limites

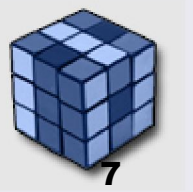
- **P_4** - O **limite da diferença** é igual a **diferença dos limites** (caso esses limites existam):

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}(2x^2-x)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}x$$

$$2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}x=2.2^2-2=6$$



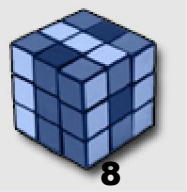
Operação com limites

- **P_5** - O **limite do produto** é igual ao **produto dos limites** (caso esses limites existam):

$$\lim_{x \to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 3}(x^2) = \lim_{x \to 3} x.x = \lim_{x \to 3} x.\lim_{x \to 3} x = 3.3 = 9$$



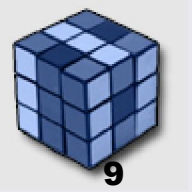
Operação com limites

- **P_6 -** O **limite do quociente** é igual ao **quociente dos limites** (caso esses limites existam):

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{x-5}{x^3 - 7} \right] = \frac{\lim_{x \to 3} (x-5)}{\lim_{x \to 3} (x^3 - 7)} = \frac{3-5}{27-7} = \frac{-1}{10}$$



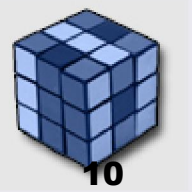
Operação com limites

- **P_7** - O **limite da potência** de uma função **$(f(x))^n$**, onde **n** é um número inteiro positivo, é igual a **potência do limite** da função (caso exista):

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} (2x + x^3)^4 = (\lim_{x \to 1} (2x + x^3))^4 = 3^4 = 81$$



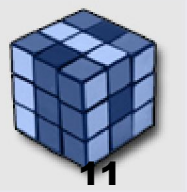
Operação com limites

- **P_8 -** O **limite da raiz** de uma função $\sqrt[n]{f(x)}$, é a **raiz do limite** da função, se o limite existe e é maior ou igual a zero:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{x^4 - 4x + 1} = \sqrt{\lim_{x \to -2} (x^4 - 4x + 1)} = \sqrt{(-2)^4 - 4(-2) + 1} = 5$$



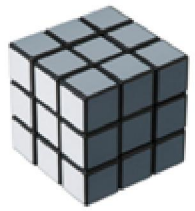
Cálculo 1 - Limites

Resumindo:

Propriedades dos Limites

- Se ***L***, ***M***, ***a*** e ***c*** são números reais e ***n*** inteiro

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M,$$



Calculos Na Veia

- Regra da soma(subtração):

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$$

- Regra do Produto:

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = L.M$$

- Regra da multiplicação por escalar:

$$\lim_{x\to a} c.f(x) = c.\lim_{x\to a} f(x) = c.L$$

- Regra do quociente:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Calculos Na Veia

- Regra da potência:

$$\lim_{x \to a} f(x)^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n = L^n$$

- Regra da raíz

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

se $\lim_{x \to a} f(x) = L < 0, n$ é impar.

Calculos Na Veia

- Regra do logaritmo:

$$\lim_{x\to a} \log_c(f(x)) = \log_c(\lim_{x\to a} f(x))$$

$$= \log_c L \quad se \quad \lim_{x\to a} f(x) > 0$$

- Regra do seno (o mesmo para o cosseno)

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen}(\lim_{x\to a} f(x)) = \operatorname{sen} L$$

- Regra da exponencial:

$$\lim_{x\to a} c^{f(x)} = c^{\lim_{x\to a} f(x)} = c^L$$

Cálculo 1 - Limites

Limite de uma função polinomial

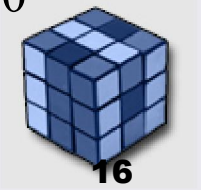
Se ***P(x)*** é uma função polinomial e ***c*** é um número real, então

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$$

Teorema 2 – Os Limites de Funções Polinomiais podem ser obtidos por Substituição:

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$

então $\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0$



Cálculo 1 - Limites

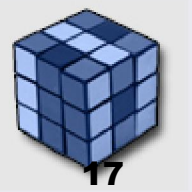
Exemplo – Limite de Uma Função Polinomial

$$\lim_{x \to -2} 3x^5 + 4x^4 - x^2 - x + 2 =$$

$$3 \times (-2)^5 + 4 \times (-2)^4 - (-2)^2 - (-2) + 2 =$$

$$3 \times (-32) + 4 \times 16 - 4 + 2 + 2 =$$

$$-96 + 64 - 4 + 2 + 2 = -32$$



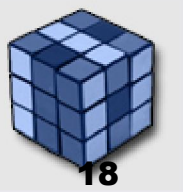
Cálculo 1 - Limites

Limites de Funções Racionais

Teorema 3 – Os Limites de Funções Racionais podem ser obtidos por Substituição, caso o limite do denominador não seja zero:

Se $P(x)$ **e** $Q(x)$ **são polinômios e** $Q(c) \neq 0$**,**

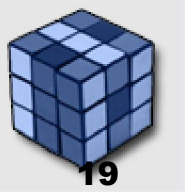
então $$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$



Cálculo 1 - Limites

Exemplo – Limite de Uma Função Racional

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$



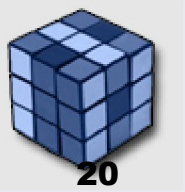
Cálculo 1 - Limites

Exemplo 3 – Cancelando um Fator Comum

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{0}{0}$$

Solução: Não podemos substituir x = 1 porque isso resulta em um denominador zero. Testamos o numerador para ver se este também é zero em x = 1. Também é, portanto apresenta o fator (x – 1) em comum com o denominador. Cancelar o (x – 1) resulta em uma fração mais simples, com os mesmos valores da original para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x} \quad \text{Se } x \neq 1$$

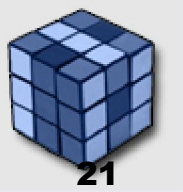


Cálculo 1 - Limites

Usando a fração simplificada, obtemos o limite desses valores quando x $\rightarrow$ 1 por substituição:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$



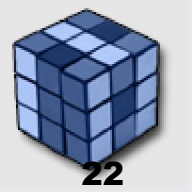
Cálculo 1 - Limites

Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



Cálculo 1 - Limites

Vamos agora calcular alguns limites imediatos, de forma a facilitar o entendimento dos exercícios mais complexos que virão em seguida:

a) $\lim_{x \to 5} (2x + 3) = 2.5 + 3 = 13$

b) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x) = (+\infty)^2 + (+\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

c) $\lim_{x \to 2} (4 + x^3) = 4 + 2^3 = 4 + 8 = 12$

d) $\lim_{x \to 4} [(3x + 3) / (2x - 5)] = [(3.4 + 3) / (2.4 - 5)] = 5$

e) $\lim_{x \to 4} [(x + 3)(x - 3)] = (4 + 3)(4 - 3) = 7.1 = 7$

Cálculo 1 - Limites

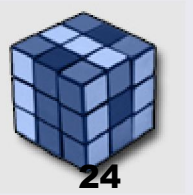
f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ R: -3

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ R: 0

h) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ R: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$ R: 4/3

j) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ R: 2/3



Cálculo 1 - Limites

- **Teorema do Confronto (ou Sanduíche)**

  Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

  e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

  então, $\lim_{x \to a} g(x) = L$

  Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}, se \left| f(x) \right| \leq x^3 \forall x \in \Re$$



Cálculo 1 - Limites

Sabemos que:

Se $|f(x)| \leq x^3$, então $-x^3 \leq f(x) \leq x^3$

- Dividindo por x^2 toda a inequação temos:

$$-x \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq x$$

- Pelo teorema do confronto:

$$\lim_{x \to 0}(-x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \leq \lim_{x \to 0} x$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \leq 0 \therefore \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

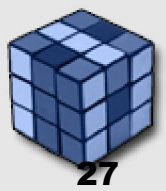


Cálculo 1 - Limites

Teorema do confronto

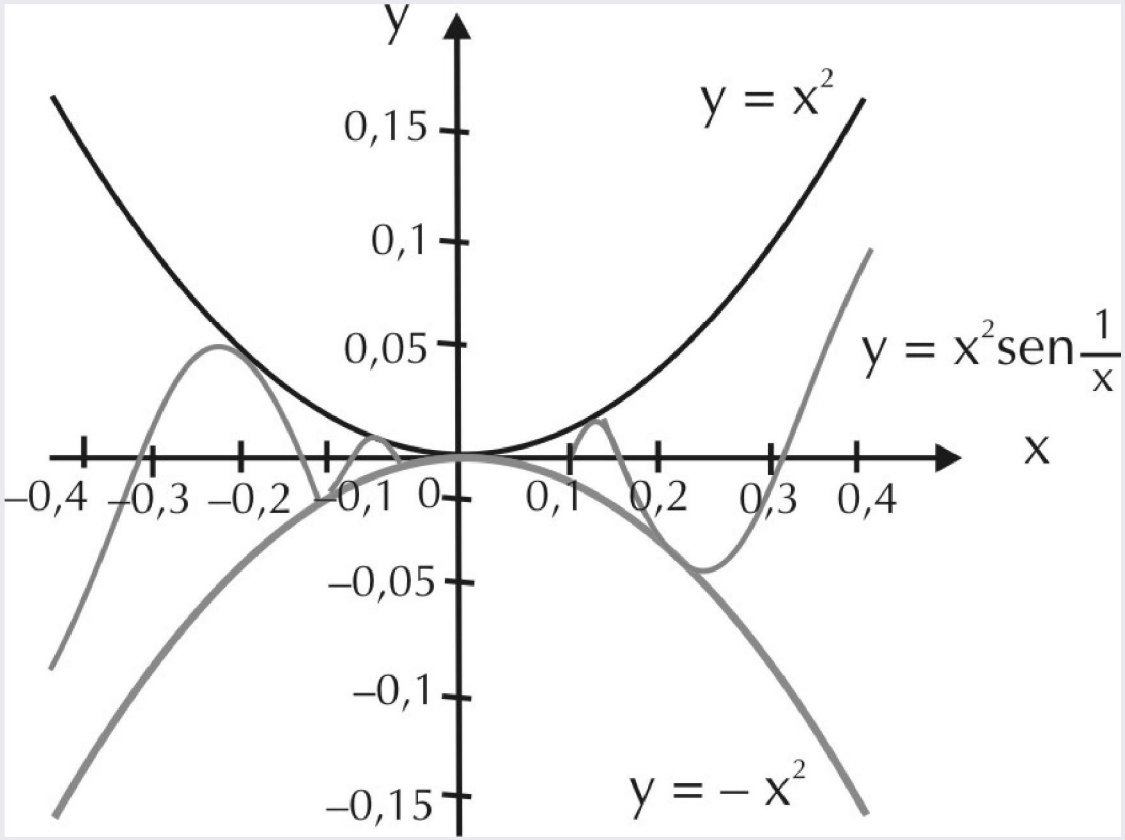
Se *f*, *g* e *h* são funções que estão definidas em algum intervalo aberto I que contém x_0, exceto, possivelmente, no próprio x_0, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo x em I, tal que $x \neq x_0$ e então $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



Cálculo 1 - Limites

Ilustração do uso do teorema do confronto



$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Autor: Ali Aidar

Propriedades dos Limites

